Études préliminaires à la topologie

par Johann Benedict Listing

Traduit de l'allemand par Claude Léger et Michael Turnheim

Il est possible de distinguer, dans l'examen des formations spatiales, deux points de vue généraux ou catégories, à savoir la quantité et la modalité*. Les recherches sur la géométrie, dans l'état actuel de leur développement, et si différentes puissent-elles être dans leurs objets autant que dans leurs méthodes, ont toujours donné la prévalence à la première de ces catégories, en conséquence de quoi la géométrie a été considérée de tous temps comme une partie de la science des grandeurs ou de la mathématique en se référant, ainsi d'ailleurs que son nom l'indique à juste titre, au concept de mesure. Le second point de vue, la modalité ou considération de toutes les questions ayant trait à la situation et à la succession, est mise le plus souvent au second plan en géométrie, à moins que celle-ci n'ait réussi à rapporter cette catégorie à la grandeur ou à la lier à elle. La méthode des coordonnées cartésiennes et la géométrie analytique qui en est issue, de même que l'application des grandeurs imaginaires et complexes aux considérations géométriques, en sont des exemples parlants. Par ailleurs, dans la géométrie des Anciens, tout comme dans les plus récents progrès accomplis dans le même sens, aussi bien d'ailleurs que dans ce qu'il est

* Paru sous le titre original : *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien, 1847, Erste Abteilung : Mathematische und naturwissenschaftliche Abhandlungen ; Göttingen.

convenu d'appeler géométrie descriptive où l'on se meut sans l'aide du calcul analytique mais uniquement dans le champ de l'intuition spatiale, il n'a jamais été question de faire de la prise en considération des rapports modaux un sujet délimité ni exclusif, encore que ceux-ci aient été la plupart du temps impliqués dans les opérations avec des grandeurs spatiales ou pour ainsi dire supportés par elles.

Il semble qu'on puisse trouver pour la première fois l'idée d'un traitement spécifique et quasi calculatoire de l'aspect modal de la géométrie, dans des énoncés occasionnels de Leibniz, où il est question d'une sorte d'algorithme au moyen duquel on devrait pouvoir soumettre à l'analyse la situation des formations spatiales comme cela se fait au moyen de l'algèbre pour tout ce qui concerne la grandeur[1]. Par la suite, on prit connaissance d'un spécimem de la nouvelle caractéristique géométrique de Leibniz, qui était essentiellement fondée sur le concept de congruence, sans posséder pour autant de contenu modal proprement dit. Aussi la nouvelle analyse géométrique de Grassmann, laquelle procède du spécimen leibnizien, de même que le calcul barycentrique de Möbius, sont-ils les seuls à pouvoir être considérés à proprement parler comme un enrichissement de la géométrie ; cela vaut également pour la « géométrie de position » de Carnot, qui se rattache à la « géométrie descriptive »* élaborée par Monge.

Par contre, le problème bien connu du « saut du cavalier », qui a été scientifiquement résolu par Euler, puis ultérieurement

1. Leibniz écrit à Huyghens, dans une lettre datée de 1679 : « mais après tous les progrès que j'ai faits en ces matières, je ne suis pas encor content de l'Algèbre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Géométrie. C'est pourquoi lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire qui nous exprime directement situm, comme l'Algèbre exprime magnitudinem. Et je croy d'en voir le moyen et qu'on pourrait représenter des figures et mesme des machines et mouvements en caractères, comme l'Algèbre représente les nombres ou grandeurs : et je vous envoye un essay qui me paroist considérable. » Voir : *Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitations mathematicae et philosophicae, ex manuscriptis in bibliotheca academiae Lugduno-Batavae servatis edidit P.J. Uylenbroek*, fasc. I, p. 9. In fasc. II, p. 6, on trouve la communication de l'essai de Leibniz, découvert dans l'héritage de Huyghens.

* En français dans le texte.

par d'autres, se tient dans une plus grande proximité avec la géométrie de situation ; les réflexions consacrées à ce problème par Vandermonde, dans ses « Remarques sur les problèmes de situation »[1], sur le trajet que doit suivre un fil pour représenter par exemple une tresse ou les mailles d'un manchon, trouvent tout à fait leur place ici. De même, une proposition mentionnée par Clausen dans les *Astronomische Nachrichten*, n° 494 (mais sans preuve).

Abstraction faite de ces quelques références, la partie modale de la géométrie attend toujours son élaboration et son développement. Il est étrange que depuis l'impulsion inaugurale suscitée par Leibniz, rien de plus n'ait été apporté à cette branche du savoir ; cela peut s'expliquer d'une certaine façon par la difficulté à trouver des méthodes plus efficaces et plus utiles pour ramener des intuitions spatiales à des concepts, et par l'insuffisance de la langue à désigner scientifiquement ces concepts, dont le matériel servant à leur élaboration recèle souvent des imbroglios considérables. Rendu maintes fois attentif à l'importance du sujet par le plus grand géomètre du moment, nous nous sommes essayés, depuis assez longtemps et de diverses façons, à l'analyse de quelques cas qui ont leur place ici, et pour lesquels les sciences de la Nature et leurs applications trouvent de multiples occurences ; et tandis que nous osons déjà en communiquer quelques éléments dans ces études préliminaires à la nouvelle science, et avant même que ces considérations puissent prétendre à une forme et à une méthode rigoureusement scientifiques, notre seule ambition est d'attirer l'attention, à l'aide de rudiments propédeutiques, d'exemples et de matériels, sur les possibilités et l'importance de cette science.

Permettons-nous d'user pour ce type de recherches sur les formations spatiales, du terme de « topologie » plutôt que de l'appellation de *geometria situ* proposée par Leibniz, laquelle évoque le concept de mesure, qui est ici entièrement subordonné et crée une confusion avec le terme de « géométrie de position »* déjà utilisé couramment pour une toute autre espèce

1. *Histoire de l'Académie royale des Sciences*, année 1771, page 566.
* En français dans le texte.

de considérations géométriques. Sous le nom de *topologie*, nous devrons donc comprendre l'étude des rapports modaux concernant les formations spatiales ou celle des lois qui régissent la connexion, la situation réciproque et la succession des points, des lignes, des surfaces, des corps et de leurs parties ou de leurs agrégats dans l'espace, abstraction faite de tout rapport de mesure et de grandeur. Grâce au concept de succession, qui est étroitement apparenté à celui de mouvement, la topologie entretient avec la mécanique une relation semblable à celle qu'elle a avec la géométrie où, là encore, la vitesse progressive ou la vitesse angulaire du mouvement tournant, de même que la masse, la grandeur du mouvement, les forces ou les moments ne sont bien entendu pas pris en considération essentielle selon leur quantité, mais uniquement selon les rapports modaux entre formations mobiles ou mues dans l'espace.

Pour atteindre au rang de science exacte auquel elle semble aspirer, la Topologie devra réduire les faits de l'intuition spatiale à des concepts les plus simples possibles, avec lesquels elle accomplira les opérations, quasiment comme en calcul, à l'aide de signes et de symboles appropriés et choisis par analogie avec ceux de la mathématique, selon des règles simples.

De la position

Nous commencerons par une considération préliminaire simple, prise par analogie avec la théorie combinatoire et s'appuyant sur le schéma des trois dimensions de l'espace. Chaque objet spatial peut en effet être affecté de trois droites se croisant à angle droit à l'intérieur de celui-ci et à partir desquelles nous pouvons différencier les uns des autres, ses dimensions et ses côtés. Dans les cas concrets, on utilise habituellement plusieurs appellations pour ces dimensions et ces côtés, appellations dont l'intérêt est plus évident pour la topologie que pour la géométrie. Pour l'espace illimité, à un endroit quelconque de la surface de la terre, c'est la ligne de sonde qui s'y prêtera le plus naturellement, avec les deux directions opposées : haut et bas,